ANALÝZA VLIVU NUMERICKÉ APERTURY A ZVĚTŠENÍ NA HODNOTU ROZPTYLOVÉ FUNKCE BODU

A.Mikš, J.Novák, P. Novák

katedra fyziky, Fakulta stavební ČVUT v Praze

Abstrakt

Práce se zabývá analýzou vlivu velikosti numerické apertury a příčného zvětšení optické fyzikálně dokonalé soustavy na hodnotu rozptylové funkce bodu. Je uvedena skalární teorie určení rozptylové funkce bodu pro zobrazení osového bodu optickou soustavou s konečnou numerickou aperturou.

1 Úvod

Rozptylová funkce bodu je základní charakteristikou zobrazovacích vlastností optické soustavy. S ní přímo souvisí problematika rozlišovací schopnosti optické soustavy a problematika optické funkce přenosu. V optické literatuře [1,2,3,4] je problematika rozptylové funkce bodu uváděna jen pro případy optických soustav s velmi malou numerickou aperturou. Tyto vztahy velmi dobře vyhovují pro velkou řadu optických soustav s kterými se v praxi setkáváme, neboť se právě jedná o optické soustavy (dalekohledy, fotografické objektivy apod.), jejichž numerická apertura bývá malá. Např. fotografický objektiv o clonovém čísle c=1,4 má numerickou aperturu A=1/2c=0,36. Typickým reprezentantem optických soustav s velkou numerickou aperturou jsou mikroskopové objektivy.

V článku jsou uvedeny analytické vztahy umožňující provést výpočet rozptylové funkce bodu pro osový bod fyzikálně dokonalé optické soustavy s numerickou aperturou konečné hodnoty a určitým příčným zvětšením. Tyto vztahy přecházejí v limitním případě nekonečně malé numerické apertury v klasický vztah uváděný v optické literatuře a jsou tedy jeho zobecněním. Úkolem této práce je ukázat vliv numerické apertury a zvětšení optické soustavy na její rozptylovou funkci bodu a to z hlediska skalární teorie vlnění.

2 Difrakční integrál

Uvažujme skalární vlnové pole. Jak je známo z teorie elektromagnetického pole [1-6], můžeme určit stav pole U(P) v libovolném bodě P oblasti omezené plochou S, je-li známo pole U(M) na této ploše

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda}\iint_S U(M)\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\mathbf{n},\mathbf{r})\,\mathrm{d}S \quad , \tag{1}$$

kde M je bod plochy S, r je vzdálenost bodu $P(u,v,R)$ od bodu $M(x,y,z)$, cos($\mathbf{n}$,$\mathbf{r}$) je kosinus úhlu, který svírá normála $\mathbf{n}$ k ploše S se směrem $\mathbf{r}$, $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo a λ je vlnová délka záření v daném prostředí.

Vypočítejme si nyní integrál (1) pro případ optické soustavy zatížené aberacemi. Plocha S nechť je vlnoplochou vystupující z optické soustavy. Bod $M(x,y,z)$ nechť je libovolný bod na vlnoploše S, dále pak nechť $P(x_P,y_P,z_P)$, ležící v obrazové rovině optické soustavy, je bod v kterém chceme určit stav pole a bod $P_o(x_o,y_o,z_o)$, také ležící v obrazové rovině optické soustavy, nechť je středem kulové plochy (referenční plochy) o poloměru R. Jestliže bod P leží blízko středu plochy S, platí pro vzdálenost r bodu P od bodu M následující vztah

$$r \approx R - \frac{xu + yv}{R} + \frac{u^2 + v^2}{2R} \ .$$

Je-li plocha S dána rovnicí $z = z(x,y)$, potom pro element dS této plochy platí [8]

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{D}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

Označíme-li

$$p = x/R\,, \qquad q = y/R\,,$$

dostáváme

$$\sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2-q^2}} \ .$$

Označíme-li dále

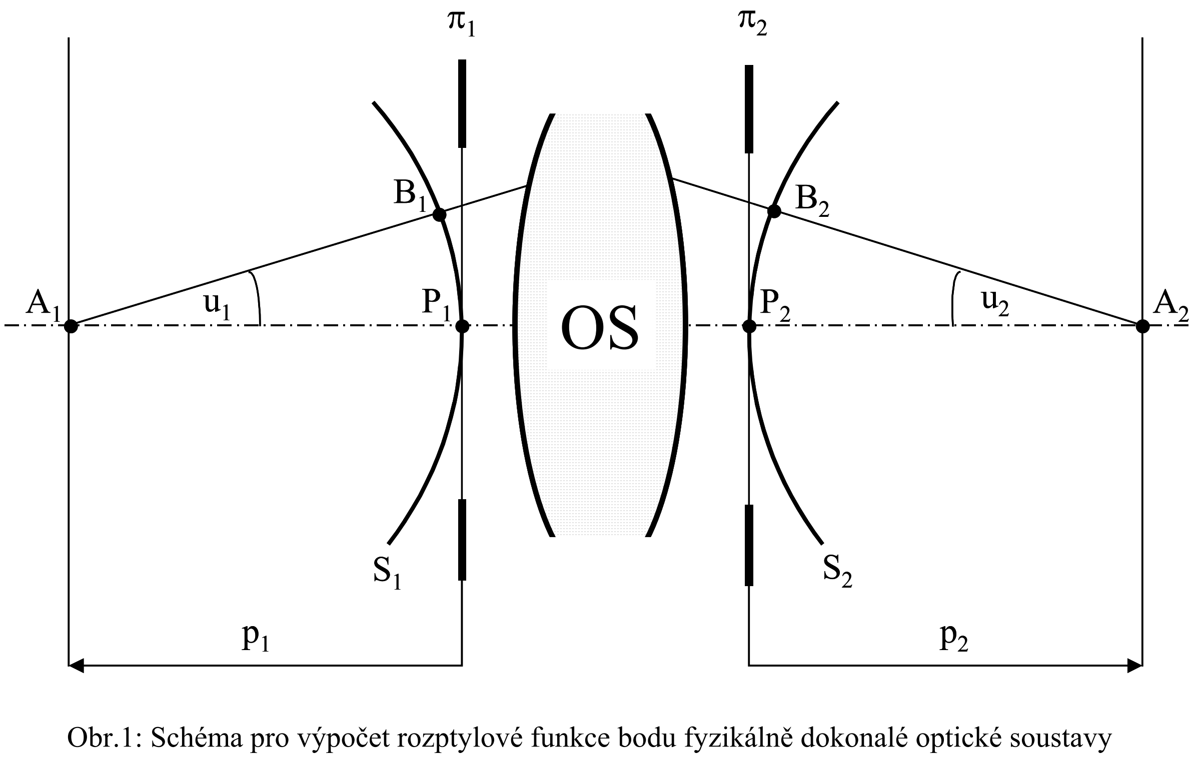
$$F(p,q) = U(p,q)\sqrt{D}\exp(ik_o W) \ ,$$

$$s = n\frac{u}{\lambda_o} \ , \qquad t = n\frac{v}{\lambda_o} \ ,$$

kde $k_o = 2\pi/\lambda_o$ a λ_o je vlnová délka světla ve vakuu, potom uvedený vztah (1) můžeme psát ve tvaru ($\cos(\mathbf{n},\mathbf{r}) \approx 1$)

$$U(s,t) = C\iint_S F(p,q)e^{-2\pi i(ps+qt)}\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q \ , \qquad (2)$$

kde C je konstanta. Vztah (2) nám tedy umožňuje určit stav pole (amplitudu pole) v obrazové rovině optické soustavy s konečnou numerickou aperturou. Z tohoto vztahu je patrno, že pole $U(s,t)$ je úměrné Fourierově transformaci funkce $F(p,q)$.



Obr.1: Schéma pro výpočet rozptylové funkce bodu fyzikálně dokonalé optické soustavy

3 Rozptylová funkce bodu fyzikálně dokonalé optické soustavy

Fyzikálně dokonalou optickou soustavou nazýváme optickou soustavu, jejíž vlastnosti jsou omezeny pouze difrakcí světla. Takováto soustava je prosta aberací a vlnoplocha z ní vystupující je tedy plocha kulová. Zkoumejme nyní zobrazení osového bodu. Vyšetřovaná situace je znázorněna na obr.1. Osový bod A_1 je optickou soustavou OS zobrazen do bodu A_2, π_1 a π_2 jsou roviny vstupní a výstupní pupily optické soustavy. Body P_1 a P_2 jsou středy vstupní a výstupní pupily. S_1 je vlnoplocha do optické soustavy vstupující a S_2 je vlnoplocha z optické soustavy vystupující. Význam ostatních symbolů je patrný z obrázku.

Abychom určili amplitudu v obrazové rovině optické soustavy, musíme znát funkci $F(p,q)$ nutnou pro výpočet integrálu (2). Je-li soustava fyzikálně dokonalá je vlnová aberace W optické soustavy rovna nule ($W = 0$) a funkce $F(p,q)$ je dána vztahem

$$F(p,q) = U(p,q)\sqrt{D}\ .$$

Dále musíme určit funkci $U(p,q) = U(x,y)$, což je amplituda na vlnoploše vystupující z optické soustavy. Ze zákona zachování energie [3, 4] plyne

$$n_1 |U_1|^2 \mathrm{d}S_1 = n_2 |U_2|^2 \mathrm{d}S_2\ ,$$

kde U_1 je amplituda na vlnoploše S_1 do optické soustavy vstupující a $U_2 = U(x,y)$ je námi hledaná amplituda na vlnoploše S_2 vystupující z optické soustavy, $\mathrm{d}S_1$ je element vlnoplochy S_1 vstupující do optické soustavy a $\mathrm{d}S_2$ element vlnoplochy S_2 vystupující z optické soustavy, n_1 a n_2 jsou indexy lomu předmětového a obrazového prostředí. Dosazením do předcházejícího vztahu dostáváme, užitím Abbeho sinové podmínky, pro výraz $U\sqrt{D}$

$$U\sqrt{D} = U_1 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\, \frac{1}{m_P}\, \frac{1}{\left(1-\sin^2 u_2\right)^{1/4}\left(1-M\sin^2 u_2\right)^{1/4}}$$

kde m_P je příčné zvětšení optické soustavy v pupilách, m je příčné zvětšení optické soustavy a

$$M = \left(\frac{n_2}{n_1} m\right)^2 .$$

Označíme-li T amplitudovou propustnost optické soustavy, potom platí

$$F = T\,U\sqrt{D} = \left(U_1 \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\, \frac{T}{m_P}\right) \frac{1}{\left(1-\sin^2 u_2\right)^{1/4}\left(1-M\sin^2 u_2\right)^{1/4}}\ . \tag{3}$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme určit funkci F, potřebnou pro výpočet amplitudy pole podle vztahu (3) a to pro případ zobrazení osového bodu předmětu. Zavedeme-li ve výstupní pupile polární souřadnice r a φ a v obrazové rovině polární souřadnice ρ a ψ, potom můžeme vztah (2) psát ve tvaru

$$U(\rho,\psi) = K \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{U(r,\varphi)\exp\left[i\tau r\cos(\varphi-\psi)\right]}{\left(1-r^2\sin^2 u_{2\max}\right)^{1/4}\left(1-Mr^2\sin^2 u_{2\max}\right)^{1/4}}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,, \tag{4}$$

kde $u_{2\max}$ je aperturní úhel paprsku procházejícího okrajem výstupní pupily, K je konstanta a τ je dáno vztahem

$$\tau = k_o \rho\, n_2 \sin u_{2\max} = \pi\rho/\lambda_0 c\,,$$

kde $c = 1/2n_2 \sin u_{2\max}$ je clonové číslo optické soustavy. Předpokládejme nyní, že příčné zvětšení v pupilách $m_P = 1$ a předmětové a obrazové prostředí je vzduch. Dále předpokládejme, že amplitudová propustnost optické soustavy je rovna jedné (nebo je konstantní). Za těchto předpokladů můžeme ve vztahu (4) položit $U(r,\varphi) = 1$.

Pro malé aperturní úhly tj. pro $u_{2\max} \to 0$ přechází vztah (4) v klasický vztah [1,2,3] uváděný v optické literatuře a sice

$$U(\tau) = \frac{2J_1(\tau)}{\tau}. \tag{5}$$

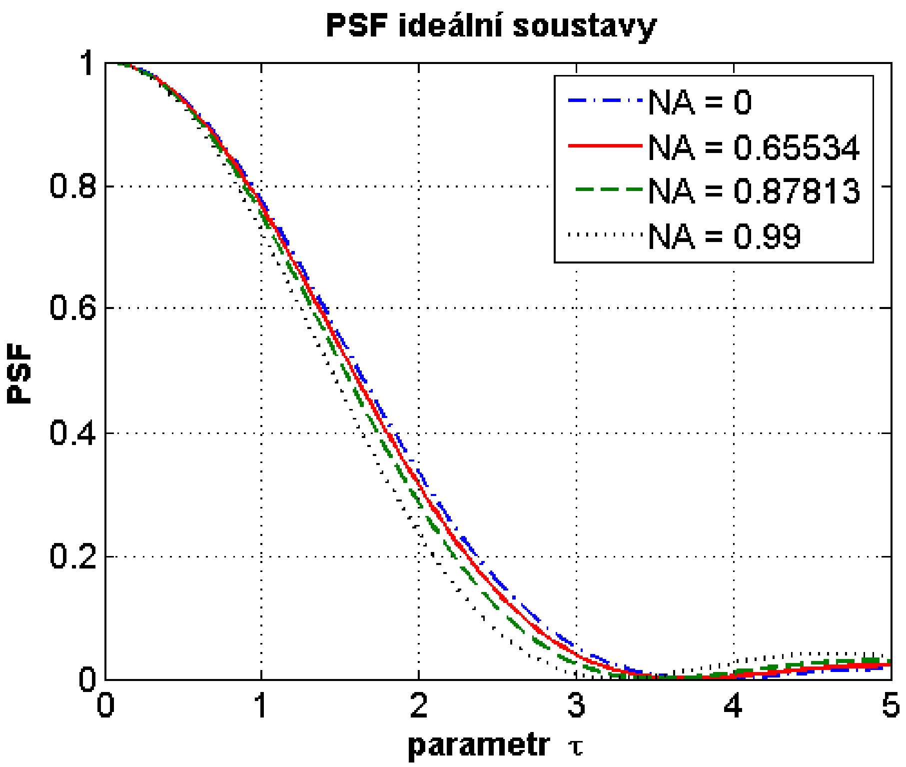
Vidíme tedy, že pro dostatečně přesný výpočet rozptylové funkce bodu optické soustavy mající velkou numerickou aperturu je nutné použít vztah (4) a ne klasický vztah (5) uváděný v literatuře. Rozptylovou funkci bodu poté lze vypočítat ze vztahu

$$I = UU^*. \tag{6}$$

4 Analýza vlivu numerické apertury a zvětšení na hodnotu rozptylové funkce

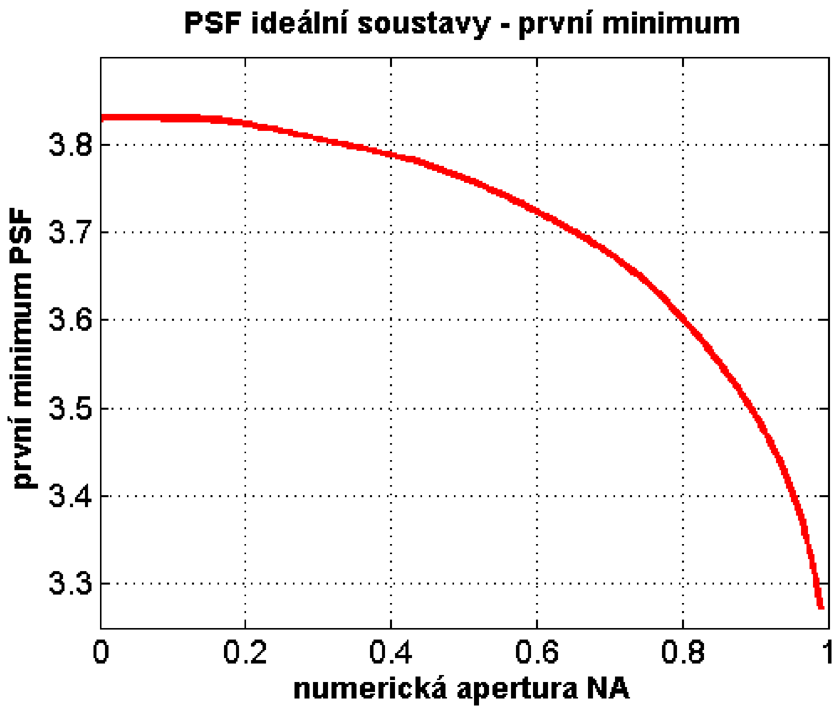
Na základě uvedených vztahů (4) a (6) pro analytický výpočet amplitudy a rozptylové funkce pro případ fyzikálně dokonalé optické soustavy s kruhovou vstupní pupilou a numerickou aperturou konečné hodnoty je provedena počítačová simulace daného problému s užitím MATLABu. Je ukázána závislost hodnot rozptylové funkce bodu pro různé velikosti numerické apertury a příčného zvětšení fyzikálně dokonalé optické soustavy.

Na obr.2 jsou znázorněny normalizované rozptylové funkce bodu fyzikálně dokonalé optické soustavy pro 4 různé hodnoty numerické apertury. První křivka je pro případ nulové hodnoty numerické apertury tj. křivka shodná s klasickou rozptylovou funkcí podle vztahu (5), další pak jsou pro různé hodnoty numerické apertury.



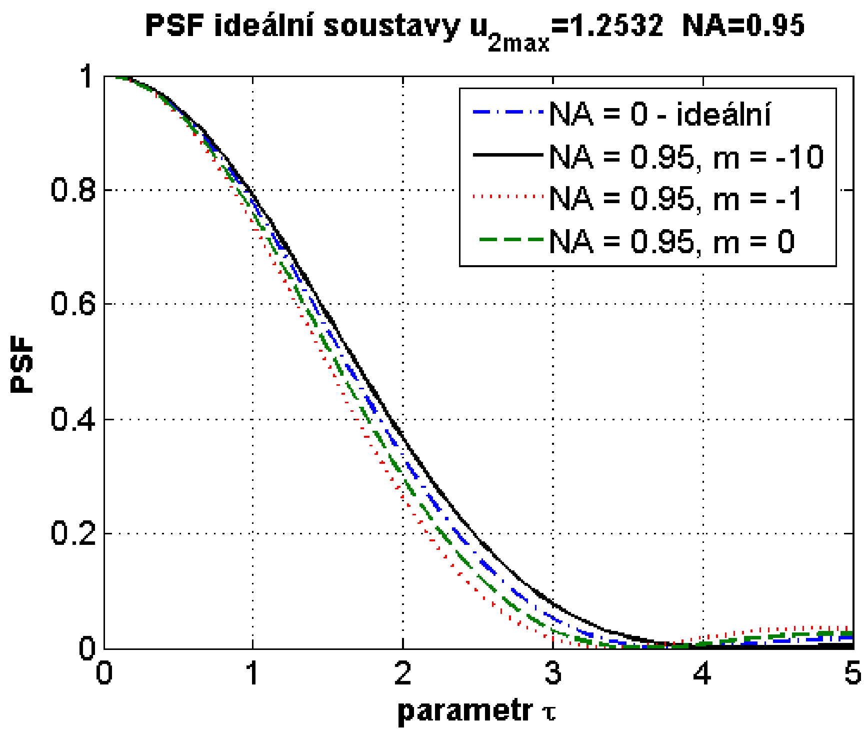
Obr.2: Rozptylová funkce bodu fyzikálně dokonalé optické soustavy

Na obr.3 je poté ukázána závislost prvního minima rozptylové funkce (poloměr Airyho disku) na hodnotě numerické apertury NA optické soustavy. Z obrázku je patrný vliv hodnoty numerické apertury optické soustavy na hodnotu prvního minima rozptylové funkce bodu. Jak je vidět z obou obrázků, klasický vztah (5) je dostatečně přesný pro optické soustavy s velikostí numerické apertury NA ≤ 0,5 tj. pro optické soustavy s clonovým číslem větším než 1 (tj. pro všechny fotografické objektivy). Pro optické systémy s hodnotou numerické apertury větší než 0,5 je vhodnější použít obecný vztah (4) namísto klasického vztahu (5). Z obou obrázků je patrné, že s rostoucí numerickou aperturou dochází ke zužování prvního minima rozptylové funkce.

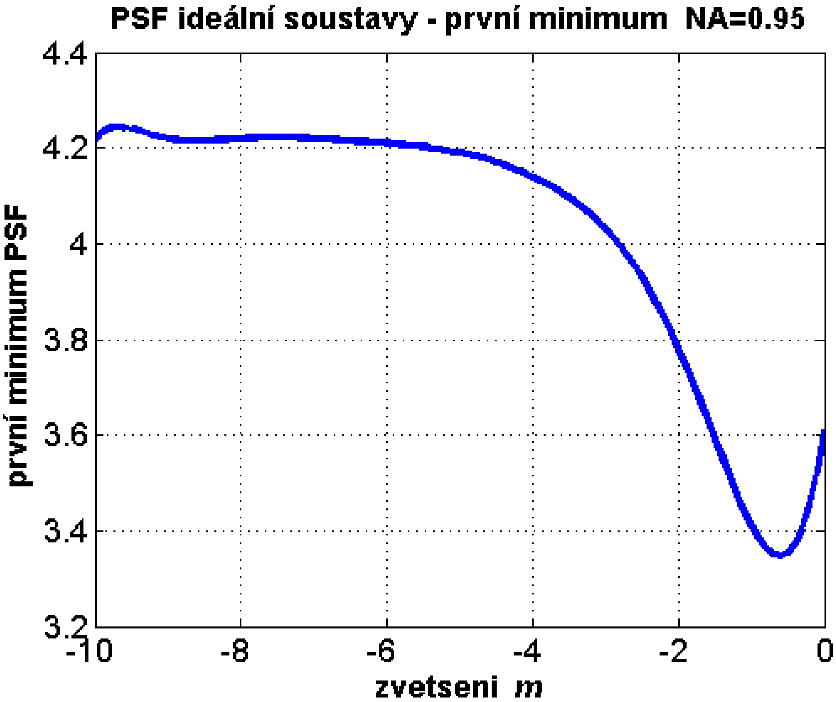


Obr.3: Závislost hodnoty prvního minima rozptylové funkce bodu na numerické apertuře

Nyní budeme zkoumat závislost tvaru rozptylové funkce bodu na hodnotě příčného zvětšení optické soustavy. Na obr.4 je zobrazena tato závislost pro tři různé hodnoty zvětšení a je porovnána se vztahem pro malé numerické apertury.



Obr.4: Rozptylová funkce bodu fyzikálně dokonalé optické soustavy (různá zvětšení)



Obr.5: Závislost hodnoty prvního minima rozptylové funkce bodu na zvětšení

Na obr.5 je poté ukázána závislost prvního minima rozptylové funkce (poloměr Airyho disku) na hodnotě příčného zvětšení *m* optické soustavy. Z obrázku je patrný vliv hodnoty příčného zvětšení optické soustavy na hodnotu prvního minima rozptylové funkce bodu. Z obrázku je patrné, že v závislosti na příčném zvětšení dochází k zužování i rozšiřování prvního minima rozptylové funkce oproti klasickému vztahu (5).

5 Závěr

V článku bylo pojednáno o výpočtu rozptylové funkce bodu na základě skalární teorie vlnového pole. Byl odvozen vztah pro výpočet amplitudy vlnového pole v obrazové rovině optické soustavy. Tento vztah platí i pro soustavy s velkou numerickou aperturou. Dále byl odvozen analytický vztah pro výpočet amplitudy vlnového pole při zobrazení osového bodu fyzikálně dokonalou optickou soustavou s numerickou aperturou konečné hodnoty a konstantní amplitudovou propustností. Na základě tohoto vztahu bylo ukázáno že amplituda pole prvně nabývá nulové hodnoty v jiném bodě než jak plyne z klasické teorie. S problematikou rozptylové funkce bodu je úzce spjata problematika rozlišovací schopnosti optických soustav. Z odvozených vztahů je patrno, že rozptylová funkce optické soustavy závisí na příčném zvětšení a numerické apertuře optické soustavy. Na základě odvozeného vztahu pro výpočet rozptylové funkce bodu optických soustav s numerickou aperturou konečné hodnoty byla provedena analýza vlivu numerické apertury a příčného zvětšení na hodnotu normalizované rozptylové funkce bodu. Oba zkoumané parametry (numerická apertura a příčné zvětšení) způsobují změny tvaru rozptylové funkce. První minimum difrakčního obrazce (tzv.Airyho disk) se mění se změnou hodnoty numerické apertury a příčného zvětšení. Zvyšováním numerické apertury dochází k zužování Airyho disku.

Práce byla podpořena v rámci projektu MSM6840770022 Ministerstva školství ČR a grantu IGS CTU0500211.

Literatura

[1] J.W.Goodman: Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill, New York, 1968.
[2] B.Havelka: Geometrická optika I. NČSAV, Praha, 1955.
[3] M.Born, E.Wolf, Principles of Optics. Oxford University Press, New York, 1964.
[4] M.V.Klein: Optics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.
[5] A.Mikš: Aplikovaná optika 10. Vydavatelství ČVUT, Praha 2000.
[6] L.Haňka: Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha, 1975.
[7] V.J.Arsenin: Matematičeskaja fizika. Nauka, Moskva, 1966.
[8] K.Rektorys: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha, 1968.

Prof.RNDr.Antonín Mikš,CSc., katedra fyziky, FSv ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354948, fax: 233333226, e-mail: miks@fsv.cvut.cz

Ing.Jiří Novák,PhD., katedra fyziky, FSv ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354345, fax: 233333226, e-mail: novakji@fsv.cvut.cz

Ing.Pavel Novák, katedra fyziky, FSv ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.
tel: 224354345, fax: 233333226, e-mail: xnovakp9@fsv.cvut.cz